Θεόδωρος Ν. Καζαντζής

Περιοδική έκδοση του παραρτήματος της Ελληνικής
Μαθηματικής Εταιρείας της Ημαθίας

Απολλώνιος

M
Λ
Δ
Δ΄
A
B
O
K

Τεύχος 1ο
Τιμή 3 €

Απρίλιος 2003


Περιεχόμενα

Απολλώνιος

Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Ν. Ημαθίας
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Τεύχος 1ο, Απρίλιος 2003

Ιδιοκτήτης:
Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία,
Παράρτημα Ημαθίας

Εκδότης:
Παπαδόπουλος Κώστας

Υπεύθυνος σύνταξης:
Ιωσηφίδης Νίκος

Συντακτική Επιτροπή:
Απλακίδης Γιάννης
Ζανταρίδης Νίκος
Ιωσηφίδης Νίκος
Μιχαηλίδου Γεωργία
Παπαδόπουλος Κώστας
Παπαδόπουλος Μανώλης
Τσιπρόπουλος Αντώνης

Επιμέλεια μη μαθηματικών κειμένων:
Μόσχου Έλενα, Φιλόλογος

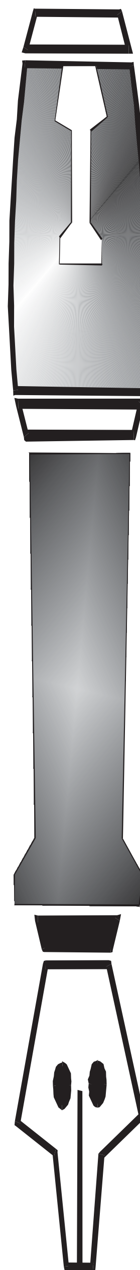
Ηλεκτρονική στοιχειοθεσία:
Ρίζος Γιώργος, Μαθηματικός, Κέρκυρα
Τηλ. και fax: 26610 33243

Εξώφυλλο:
Παπαδόπουλος Μανώλης,
Μαθηματικός, Βέροια

Εκτύπωση:
Τσιαρτσιάνης Αθανάσιος, Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 - 682080

Διεύθυνση:
Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία,
Παράρτημα Ημαθίας
Κουντουριώτη 8, 591 00 ΒΕΡΟΙΑ
Τηλ και fax: 23310-67107

Διεύθυνση επικοινωνίας,
αποστολή εργασιών:
Ιωσηφίδης Νίκος,
Τρεμπεσίνας 6, 591 00 ΒΕΡΟΙΑ
Τηλ. 23310-20143 και 23310-29504
Fax: 23310-20408
e-mail: iossifid@otenet.gr



Αντί χαιρετισμού, ένας αποχαιρετισμός...

Η πρώτη έκδοση του περιοδικού σημαδεύτηκε από το τραγικό δυστύχημα που στοίχισε τη ζωή τόσων μαθητών. Τούτες τις στιγμές τα λόγια αποδεικνύονται φτωχά, ο πόνος είναι ανείπωτος. Τι μπορεί να πει κάποιος σ' ένα γονιό που έχασε ένα δεκαεξάχρονο παιδί τόσο απρόσμενα και άδικα! Πώς ν' απαντήσεις στα αμέτρητα "γιατί" που καίνε και θολώνουν τη σκέψη!

Δεν θα επιχειρήσουμε ν' απαλύνουμε τον πόνο με κοινότοπα λόγια παρηγοριάς. Θα ήταν ανώφελο. Ίσως, περισσότερο από κάθε άλλον, εμείς οι εκπαιδευτικοί συμπάσχουμε ειλικρινά στο πένθος των γονιών. Γιατί ζούμε και εργαζόμαστε με τα παιδιά. Είναι για μας αναπόσπαστο κομμάτι της ύπαρξής μας. Το μέγεθος της απώλειας είναι δυσβάσταχτο για όλη την εκπαιδευτική κοινότητα.

Είναι βέβαιο πως κανένας δεν θα ξεχάσει. Ίσως ο χρόνος αμβλύνει κάποτε τον πόνο, αλλά δε θα τον σβήσει. Ας ευχηθούμε να είναι τα τελευταία παιδιά που θυσιάζουν τη ζωή τους και τα όνειρά τους στο βωμό των παραλείψεων και της αδιαφορίας.

Η σκέψη και η αγάπη μας θα σας συντροφεύει πάντοτε. Παιδιά ... καλό ταξίδι.

Η Συντακτική Επιτροπή



Απολλώνιος

Ένα ακόμη μαθηματικό περιοδικό;



Η έκδοση του μαθηματικού περιοδικού **«Απολλώνιος»** είναι πλέον ένα γεγονός. Ο **«Απολλώνιος»** εκδίδεται και κυκλοφορεί από το Παράρτημα του νομού Ημαθίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Απευθύνεται σε μαθητές, φοιτητές, μαθηματικούς, και σε κάθε έναν που έχει μία ιδιαίτερη σχέση με τα Μαθηματικά.

Η ύλη του περιοδικού κινείται γύρω από τα Μαθηματικά του Λυκείου. Περιλαμβάνει εργασίες πάνω σε μαθηματικά θέματα, στήλες που θα αποτελέσουν μόνιμη βάση του περιοδικού, στήλες αλληλογραφίας, αλλά και στήλη με ειδήσεις γύρω από την δραστηριότητα του Παραρτήματος Ημαθίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Ειδικά τώρα που το Παράρτημά μας έχει την τιμητική ευθύνη της διοργάνωσης του 20ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας που θα διεξαχθεί στη Βέροια στις 7, 8 και 9 Νοέμβρη του 2003, το περιοδικό μας θα ενημερώνει τους αναγνώστες του σχετικά με την πορεία προετοιμασίας του Συνεδρίου.

Φιλοδοξία της Συντακτικής Επιτροπής είναι να ενεργοποιήσει αρχικά τους μαθητές, τους φοιτητές και τους μαθηματικούς του Νομού μας, από τους οποίους έχουμε την απαίτηση να τροφοδοτούν με μαθηματική ύλη το περιοδικό. Φυσικά στο περιοδικό μπορούν να γράφουν και άλλοι συνάδελφοι και φίλοι από οποιαδήποτε περιοχή της χώρας. Το περιοδικό αποτελεί έκδοση της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, άρα η σχέση του με την Εταιρεία και τις εκδόσεις της, που έχουν μία επιστημονική και ιστορική διαδρομή, είναι σχέση συνεργασίας και αλληλοβοήθειας.

Η έκδοση ενός ακόμη μαθηματικού περιοδικού δεν είναι εύκολη υπόθεση. Γνωρίζουμε τις δυσκολίες και τα εμπόδια. Ακόμη γνωρίζουμε ότι η χώρα μας δεν έχει την «πολυτέλεια» της έκδοσης πολλών μαθηματικών περιοδικών. Παρ' όλα αυτά τολμούμε, ελπίζοντας ότι η ποιότητα και η αποδοχή του εγχειρήματος θα είναι εκείνη που θα μας δώσει το κουράγιο να συνεχίσουμε. Επιζητούμε και περιμένουμε την κριτική των συναδέλφων και φίλων. Χωρίς αυτή δεν μπορεί να υπάρχει εξέλιξη και τελικά πρόοδος. Πιστεύουμε ότι ο **«Απολλώνιος»** με τη συμμετοχή και τη βοήθεια όλων θα αντέξει στην πίεση του ερωτήματος: «Γιατί ένα ακόμη μαθηματικό περιοδικό;»

Παπαδόπουλος Κώστας
Πρόεδρος της Δ.Ε.
του παραρτήματος Ν. Ημαθίας
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

ΕΚΔΗΛΩΣΗ ΓΙΑ ΤΟΝ ΘΕΟΔΩΡΟ Ν. ΚΑΖΑΝΤΖΗ (1937–1999)



Το Σάββατο 1 Φεβρουαρίου 2003 το Παράρτημα Νομού Ημαθίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας διοργάνωσε εκδήλωση για να τιμήσει τη μνήμη του μαθηματικού Θεόδωρου Καζαντζή.



Στην εκδήλωση που πραγματοποιήθηκε στη Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη της Βέροιας προσκλήθηκαν και μίλησαν για τη ζωή, τις σπουδές, το επι-

στημονικό και διδακτικό έργο του Θεόδωρου Καζαντζή οι Χάρης Βαφειάδης, Γιάννης Θωμαΐδης, Νίκος Καστάνης και Ελένη Μήτσιου.

Η εκδήλωση άνοιξε με χαιρετισμό του προέδρου της διοικούσας επιτροπής του παραρτήματος Κώστα Παπαδόπουλου, συνεχίστηκε, μετά τις ομιλίες, με προβολή ταινίας από την ομιλία του Θεόδωρου Καζαντζή στο Συνέδριο της Ε.Μ.Ε. στην Αλεξανδρούπολη το 1996 και έκλεισε με την απαγγελία του ποιήματος «*Καλό ταξίδι Δάσκαλε…*», που έγραψε ο μαθηματικός Θανάσης Κωνσταντινίδης. Η απαγγελία έγινε από τη μαθήτρια Σάρα Αντωνιάδου με τη συνοδεία βιολιού από τον Αλέξανδρο Ιωσηφίδη.

Δημοσιεύουμε στο τεύχος αυτό του «Απολλώνιου» την ομιλία του Γιάννη Θωμαΐδη, διδάκτορα Μαθηματικών και καθηγητή στο Πειραματικό Σχολείο του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, η οποία αναφέρεται σε μερικές όψεις του διδακτικού έργου του Θεόδωρου Καζαντζή.

Ο ΘΕΟΔΩΡΟΣ Ν. ΚΑΖΑΝΤΖΗΣ ΚΑΙ Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

(Μια προσωπική εκτίμηση)

Γιάννης Θωμαΐδης
Πειραματικό Σχολείο
Πανεπιστημίου Μακεδονίας

Πριν αρχίσω την αποψινή ομιλία θα ήθελα να συγχαρώ τη Διοικούσα Επιτροπή του Παραρτήματος Ημαθίας της Ε.Μ.Ε. για την πρωτοβουλία της να τιμήσει τη μνήμη του Θεόδωρου Καζαντζή. Η ελληνική μαθηματική κοινότητα, ιδιαίτερα αυτή της μέσης εκπαίδευσης, δεν μας έχει συνηθίσει σε τιμητικές εκδηλώσεις για τα επίλεκτα μέλη της που αποχωρούν από την ενεργό δράση ή από τη ζωή …

Από την εμπειρία της προσωπικής γνωριμίας και από συζητήσεις με πολλούς ανθρώπους, τη γνώμη των οποίων εκτιμώ ιδιαίτερα, μπορώ να υποστηρίξω ότι ο Θεόδωρος Καζαντζής υπήρξε ένας προικισμένος μαθηματικός, ένας χαρισματικός δάσκαλος και μια πολυσχιδής προσωπικότητα. Από τα τρία αυτά γνωρίσματα του χαρακτήρα του αισθάνομαι όμως περισ-

σότερο κατάλληλος να μιλήσω για το δεύτερο, επειδή μπορώ να στηριχθώ αποκλειστικά σε προσωπικές εμπειρίες.

Είναι σε όλους γνωστό ότι ο Θεόδωρος Καζαντζής αναδείχθηκε με τη διδασκαλία και το συγγραφικό έργο του μέσα από το φροντιστηριακό χώρο. Εκείνο όμως που τον έκανε να ξεχωρίζει ήταν ακριβώς η ολοκληρωτική αντίθεσή του με αυτό που συνήθως χαρακτηρίζει αρνητικά το συγκεκριμένο χώρο: Δηλαδή η ταύτιση της γνώσης με την εκάστοτε ύλη των εξετάσεων και η μετατροπή της διδασκαλίας και μάθησης σε μια διαδικασία «προπόνησης» για τις εξετάσεις.

Είχα τη μεγάλη τύχη να γνωρίσω το Θεόδωρο Καζαντζή σε ηλικία 17 χρονών, μόλις άρχιζα τη ΣΤ΄ Γυμνασίου, ενώ εκείνος, έχοντας τα διπλάσια ακριβώς χρόνια από μένα, ήταν συνιδιοκτήτης του φροντιστηρίου «Καζαντζή – Φιλίππου» και είχε μόλις εκδώσει την περίφημη δίτομη *Άλγεβρά* του.[1]

Την περίοδο εκείνη στα τμήματα Πρακτικής Κατεύθυνσης της Ε΄ Γυμνασίου διδάσκονταν η *Άλγεβρα* του Η. Ντζιώρα. Θυμάμαι ότι στο σχολείο είχαμε ασχοληθεί αρχικά με ένα μεγάλο κεφάλαιο του βιβλίου που αφορούσε τις απόλυτες τιμές, ενώ στο δεύτερο εξάμηνο με το κεφάλαιο των ακολουθιών που περιείχε τα σχετικά με τον εψιλοντικό ορισμό του ορίου και τις ιδιότητες της σύγκλισης. Η πρώτη επαφή μας με αυτές τις έννοιες ήταν ο ορισμός της μηδενικής ακολουθίας, που εμφανίζονταν στο βιβλίο του Ντζιώρα ως εξής:

$$\alpha_\nu \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\ \ |\alpha_\nu| < \varepsilon \ \ \forall\ \ \nu \geq \nu_0$$

Η κατανόηση αυτού του ορισμού και κυρίως η εφαρμογή του για να αποδειχθεί ότι μια συγκεκριμένη ακολουθία είναι μηδενική, αποδείχθηκε αληθινός σταυρός του μαρτυρίου! Ύστερα από ένα δίμηνο αποκλειστικής ενασχόλησης με τις απόλυτες τιμές, ήταν σχεδόν αδύνατο να χειριστούμε τις ανισοτικές σχέσεις που είναι απαραίτητες για την απόδειξη της σύγκλισης μιας ακολουθίας. Ο καθηγητής του σχολείου, ο οποίος δεν καταλάβαινε περισσότερα από εμάς, αλλά γνώριζε καλά την κλασική άλγεβρα, παρέκαμψε γρήγορα τον ορισμό για να ασχοληθούμε με τις ιδιότητες των ορίων,

---

[1] Κατά την άποψή μου, η δίτομη ***Άλγεβρα*** (1971) του Θεόδωρου Καζαντζή αποτελεί ένα από τα βιβλία–σταθμούς στην ελληνική βιβλιογραφία αυτού του κλάδου των στοιχειωδών Μαθηματικών. Τα άλλα είναι η ***Στοιχειώδης Άλγεβρα*** (1888) του Ιωάννη Χατζηδάκι, η ***Μεγάλη Άλγεβρα*** (1944) του Αριστείδη Πάλλα και τα ***Αλγεβρικά Θέματα*** (1952) του Παναγιώτη Μάγειρα.

οι οποίες καθιστούν τον υπολογισμό τους μια διαδικασία αλγεβρικών μετασχηματισμών με αναγωγή σε ορισμένα βασικά όρια. Σε λίγο καιρό εγώ και οι συμμαθητές μπορούσαμε να υπολογίζουμε κάποια όρια ακολουθιών, αλλά αυτό γινόταν ερήμην της έννοιας του ορίου![2]

Αυτά και άλλα προβλήματα με έφεραν το Σεπτέμβριο της επόμενης χρονιάς στο φροντιστήριο «Καζαντζή–Φιλίππου», υποψήφιο της Φυσικομαθηματικής, σε ένα τμήμα στο οποίο ο Θεόδωρος Καζαντζής δίδασκε, μεταξύ άλλων, τις ακολουθίες. Στον πίνακα εμφανίστηκε πάλι ο τρομερός εψιλοντικός ορισμός, αλλά τώρα συνοδεύτηκε από μια κοφτή δήλωση του Θεόδωρου Καζαντζή: «*Δε θα προχωρήσουμε βήμα παρακάτω αν δεν καταλάβετε όλοι τον ορισμό της σύγκλισης*».

Ξεκινώντας από συγκεκριμένα, απλά παραδείγματα ακολουθιών και γραφικές παραστάσεις μας εξήγησε μία–μία όλες τις λεπτομέρειες του ορισμού, το νόημα των ποσοδεικτών, το ρόλο του δείκτη ν_0, την κατασκευή του κατάλληλου δείκτη, το χειρισμό των ανισοτικών σχέσεων (αυξομειώσεων) με απόλυτες τιμές. Σε μια ατμόσφαιρα πραγματικής μυσταγωγίας (την πλήρη σημασία της οποίας εκτίμησα πολύ αργότερα), ο Θεόδωρος Καζαντζής μας εξήγησε ένα μεγάλο μαθηματικό επίτευγμα: Τον τρόπο με τον οποίο η αέναη και ασύλληπτη έννοια του απείρου μπορεί να παγιδευτεί και να ακινητοποιηθεί μέσα σε μερικές ανισότητες.[3] Την περίοδο εκείνη δεν μπορούσαμε να συλλάβουμε την έκταση αυτού του εγχειρήματος και επειδή η διδασκαλία τραβούσε σε μάκρος, ορισμένοι από εμάς, έχοντας υπόψη τη σχολική εμπειρία και πληροφορίες από άλλα φροντιστήρια, τολμήσαμε να «υποδείξουμε» ότι πρέπει να προχωρήσουμε στις ιδιότητες των ορίων. Η απάντηση του Θεόδωρου Καζαντζή, ο οποίος δε σήκωνε μύγα στο σπαθί του σε ζητήματα μαθηματικής συνέπειας, ήταν κοφτή και αυστηρή: *«Εγώ δεν πρόκειται να σας κάνω παπαγάλους, που θα υπολογίζουν όρια χωρίς να γνωρίζουν τι είναι όριο!»*. Και συμπλήρωσε με το σταθερό επιχείρημα, που αποτελούσε βασικό στοιχείο της διδακτικής μεθοδολογίας του και χρησιμοποιούσε σε όλα τα βιβλία του: «*Το χρόνο που αφιερώνετε τώρα για να κατανοήσετε τις βασικές έννοιες και να εμβαθύνετε στον τρόπο σκέψης και*

[2] Όπως είναι γνωστό, αυτή η διδακτική πρακτική αποτελεί σήμερα επίσημη οδηγία, με αποτέλεσμα οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου να υπολογίζουν όρια συναρτήσεων αγνοώντας ουσιαστικά τι είναι όριο.

[3] Μια μικρή εικόνα αυτής της διδασκαλίας μπορεί να αποκτήσει ο αναγνώστης αν ανατρέξει στις σελίδες 358 – 360 του 2ου τόμου της ***Άλγεβρας*** του Θεόδωρου Καζαντζή (έκδοση 1971).

εργασίας, θα τον κερδίσετε πολλαπλάσιο αργότερα».

Την αξία αυτών των λόγων, αλλά και όσων έμαθα εκείνη την περίοδο την εκτίμησα αργότερα σαν φοιτητής των Μαθηματικών, όταν προσπαθούσα να εμβαθύνω στις έννοιες της Ανάλυσης και ιδιαίτερα στη γενίκευση της έννοιας της σύγκλισης σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ή σε αφηρημένους μετρικούς και τοπολογικούς χώρους. Τα λόγια του Θεόδωρου Καζαντζή ήταν πράγματι προφητικά!

Σαν φοιτητής και αργότερα σαν νέος μαθηματικός συναντούσα συχνά το Θεόδωρο Καζαντζή και συζητούσα μαζί του, κυρίως για βιβλία Μαθηματικών, δικά του ή άλλων. Στις συναντήσεις αυτές διαπίστωσα επίσης την καταπληκτική ευστροφία του στην επίλυση προβλημάτων και ιδιαίτερα την ικανότητά του να ανακαλύπτει κενά και λάθη σε ζητήματα που από άλλους περνούσαν απαρατήρητα. Τα μαθηματικά λάθη και η ερμηνεία τους ήταν ακριβώς το ζήτημα που τα τελευταία χρόνια μας έφερε σε στενότερη επαφή και έγινε αφορμή για ορισμένες πολύωρες, έντονες αλλά και αξέχαστες συζητήσεις.

Η πρώτη τέτοια συζήτηση έγινε στις αρχές της δεκαετίας του 1990, όταν ετοίμαζα τη διδακτορική διατριβή μου στο Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ. Εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο οι τεταρτοετείς φοιτητές Μαθηματικών χρησιμοποιούν ορισμένες βασικές μαθηματικές έννοιες, διαπίστωσα έκπληκτος ότι οι μισοί από αυτούς δεν είχαν ουσιαστικά κατανοήσει την έννοια της απόλυτης τιμής.

Για παράδειγμα, δεν αντιλαμβάνονταν ότι η εξίσωση: $\left||x-2|-17\right|=-2$ είναι αδύνατη και προσπαθούσαν να την επιλύσουν με διαδικασίες απομάκρυνσης απολύτων τιμών! Όταν έδειξα τα αποτελέσματα αυτά στο Θεόδωρο Καζαντζή και ζήτησα τη δική του ερμηνεία, αυτός ξεσπάθωσε εναντίον του τρόπου διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο και το Πανεπιστήμιο, που οδηγεί τους νέους στην αναζήτηση της ευκολίας και στην αποστήθιση συνταγών αντί στην προσωπική μελέτη και την εμβάθυνση. Η δική μου ερμηνεία, που χρησιμοποιούσε ορισμένες θεωρητικές έννοιες της Διδακτικής των Μαθηματικών, έριχνε το βάρος στην ανεπάρκεια των συγκεκριμένων ασκήσεων (εξισώσεις με απόλυτες τιμές) για την κατανόηση της απόλυτης τιμής και ειδικότερα στον καθιερωμένο τρόπο αντιμετώπισής τους (απομάκρυνση απολύτων τιμών με διάκριση περιπτώσεων, πίνακες προσήμων κ.λπ.) Ο Θεόδωρος Καζαντζής θεώρησε αυτές τις θεωρητικές ερμηνείες περιττή πολυτέλεια: «*Το πράγμα είναι ολοφάνερο*», μου είπε. «*Ύστερα από τρία χρόνια στο Λύκειο και τέσσερα στο Πανεπιστήμιο οι φοι-*

τητές δεν έχουν καταλάβει τι είναι απόλυτη τιμή. Χρειάζεται και άλλη απόδειξη για την κατάντια του συστήματος;»

Εγώ βέβαια επέμεινα στην ανάγκη βαθύτερης μελέτης του προβλήματος και έτσι η συζήτηση έφτασε στο επίμαχο ζήτημα της Διδακτικής των Μαθηματικών. Την εποχή εκείνη είχε δημιουργηθεί, με αφορμή τους διδάσκοντες στα Περιφερειακά Επιμορφωτικά Κέντρα, μια μεγάλη οξύτητα γύρω από τον όρο «Διδακτική των Μαθηματικών» και ο πολυμήχανος Θεόδωρος Καζαντζής είχε επινοήσει τον όρο «Παραδιδακτική» για να εντάξει σ' αυτή την περιοχή, όπως έλεγε, όσους ασχολούνται με τη Διδακτική των Μαθηματικών χωρίς να ξέρουν Μαθηματικά. Και επειδή ήταν επιμελής αναγνώστης όσων γράφονταν στα διάφορα ελληνικά περιοδικά, άρχισε να μου αναφέρει σχετικά παραδείγματα. Στο σημείο αυτό διαφωνήσαμε ριζικά. Η δική μου πεποίθηση, εδραιωμένη στη μελέτη της ξένης βιβλιογραφίας, ήταν ότι οι έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών ασχολούνται με ένα ευρύτατο φάσμα εννοιών, από το Νηπιαγωγείο μέχρι το Πανεπιστήμιο και παράγουν πολύ χρήσιμα αποτελέσματα για τη διδακτική πράξη. Για ποιο λόγο π.χ. πρέπει να αποκλείσουμε, ως χαμηλού μαθηματικού επιπέδου, τις έρευνες που ασχολούνται με τις δυσκολίες των μαθητών του Δημοτικού να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος; Και σε τελευταία ανάλυση, την κατάσταση ενός πεδίου ερευνών, όπως η Διδακτική των Μαθηματικών, δεν μπορούμε να τη χαρακτηρίσουμε παίρνοντας υπόψη μόνο τα αποτελέσματα που παράγονται σε μια συγκεκριμένη χώρα.

Η δεύτερη συζήτηση για το ζήτημα της Διδακτικής προκλήθηκε από το Θεόδωρο Καζαντζή λίγα χρόνια μετά, όταν με φώναξε στο σπίτι του και μου έδωσε να διαβάσω το χειρόγραφο μιας εργασίας που μόλις είχε ολοκληρώσει.[4] Στη εργασία αυτή, με εκπληκτική διεισδυτικότητα και καυστικό ύφος που φτάνει στα όρια της λογοτεχνικής σάτιρας, ο Θεόδωρος Καζαντζής αποκαλύπτει μια σειρά απίστευτων μαθηματικών λαθών ενός βιβλίου Ανάλυσης για της εξετάσεις της 1ης Δέσμης, που είχε κυκλοφορήσει σε πολυτελή έκδοση πριν λίγα χρόνια, με συγγραφείς γνωστά ονόματα φροντιστών και στελεχών της δημόσιας εκπαίδευσης.

«*Τι ερμηνείες δίνει η Διδακτική των Μαθηματικών γι' αυτό το φαινόμενο;*» με ρώτησε σαρκαστικά. «*Αυτοί που τα έγραψαν, επικαλούνται τη μεγάλη εμπειρία και τις γνώσεις τους για να βοηθήσουν δήθεν τους υποψήφιους της 1ης Δέσμης. Στην πραγματικότητα όμως τους εξαπατούν, πουλώντας ένα*

---

[4] Η εργασία αυτή, που παραμένει ανέκδοτη, είναι μάλλον και η τελευταία που έγραψε.

πολυτελές περιτύλιγμα, γεμάτο προχειρότητες και λάθη. Αυτά τα βιβλία δεν μορφώνουν, αποβλακώνουν! Να το εκπαιδευτικό, κοινωνικό και εθνικό κατάντημα στο οποίο έχουμε φτάσει!»

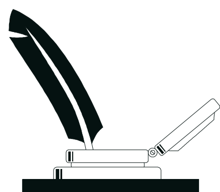
Ακολούθησε ένας χειμαρρώδης, επικριτικός λόγος που επεκτάθηκε στις επιχειρούμενες τότε (1997) αλλαγές στο Λύκειο, την αναδιάταξη της ύλης των Μαθηματικών και ιδιαίτερα την αξιολόγηση με τις λεγόμενες «ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου».[5]

Φυσικά ήταν αδύνατο εκείνη τη στιγμή να ανταποκριθώ στην πρόκληση και να επιχειρήσω "ερμηνείες». Ο Θεόδωρος Καζαντζής έθεσε μέσα σε λίγα λεπτά, με το δικό του μοναδικό τρόπο, ένα πλήθος από ζητήματα που αφορούν τη μαθηματική (και όχι μόνο) εκπαίδευση. Επιβεβαίωσε έτσι για άλλη μια φορά ότι η Διδακτική των Μαθηματικών αποτελεί ένα δύσκολο πρόβλημα στο οποίο, εκτός από τα Μαθηματικά, πρέπει κανείς να λάβει πολύ σοβαρά υπόψη την επίδραση πολλών άλλων παραμέτρων.

Ο Θεόδωρος Καζαντζής υπήρξε για μένα και πιστεύω για πολλούς που βρίσκονται σήμερα σ' αυτήν την αίθουσα ένας δάσκαλος με καθοριστική επίδραση, τόσο στον τρόπο που μάθαμε Μαθηματικά, όσο και στο τρόπο με τον οποίο προσπαθούμε να διδάξουμε Μαθηματικά σε άλλους. Εύχομαι στο Παράρτημα Ημαθίας της Ε.Μ.Ε. να συνεχίσει την παράδοση που εγκαινιάζει απόψε, με τη διοργάνωση τιμητικών εκδηλώσεων και για άλλους λαμπρούς δασκάλους των Μαθηματικών του βορειοελλαδικού χώρου.

---

[5] Οι απόψεις του Θεόδωρου Καζαντζή για το συγκεκριμένο ζήτημα έχουν κατατεθεί στην εργασία του «**Η απομυθοποίηση των tests πολλαπλής επιλογής**» που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Μαθηματική Παιδεία*, τεύχος 2, σσ. 19-27 (1996).



ΕΡΓΟΓΡΑΦΙΑ ΘΕΟΔΩΡΟΥ Ν. ΚΑΖΑΝΤΖΗ (1937-1999)

Α΄: ΒΙΒΛΙΑ

1. ***Άλγεβρα δια τους υποψηφίους των Ανωτάτων σχολών και ιδιαιτέρως Πολυτεχνείου–Φυσικομαθηματικής,*** (σελ. 142+16+154), Φροντιστήρια Ευκλείδης, Θεσσαλονίκη 1967.
2. ***Άλγεβρα δια τους υποψηφίους των ανωτάτων σχολών θετικών επιστημών και τους μαθητάς των ανωτέρων τάξεων των πρακτικών Γυμνασίων***, Τόμος Ι (σελ. 512), Βιβλιοχαρτοπωλείον ΗΛΙΟΣ, Θεσσαλονίκη 1971.
3. ***Άλγεβρα δια τους υποψηφίους των ανωτάτων σχολών θετικών επιστημών και τους μαθητάς των ανωτέρων τάξεων των πρακτικών Γυμνασίων***, Τόμος ΙΙ (σελ. 533), Βιβλιοχαρτοπωλείον ΗΛΙΟΣ, Θεσσαλονίκη 1971.
4. ***Πολυώνυμα,*** (σελ. 355), Εκδόσεις Γ. Αθανασιάδη – Σ. Τορνικίδη, Θεσσαλονίκη 1977.
5. ***Άλγεβρα δια τους υποψηφίους των ανωτάτων σχολών θετικών επιστημών και τους μαθητάς των ανωτέρων τάξεων των πρακτικών Γυμνασίων***, Τόμος Ι (σελ. 625), Θεσσαλονίκη 1978.
6. ***Άλγεβρα***, Τόμος Β΄ (σελ. 482), Εκδόσεις Παπαδημητροπούλου, Αθήναι (χ.χ.).
7. ***Ασκήσεις Αναλύσεως***, (σελ. 36), Θεσσαλονίκη 1978.
8. ***Συναρτήσεις***, Τεύχος πρώτο (σελ. 242), Τυποεκδοτική, Θεσσαλονίκη 1979.
9. ***Συναρτήσεις***, Τεύχος δεύτερο (σελ. 248), Τυποεκδοτική, Θεσσαλονίκη 1980.
10. ***Αριθμοθεωρία*** (σελ. 163), Τυποεκδοτική, Θεσσαλονίκη 1980.
11. ***Ακολουθίες***, (σελ. 214), Εκδόσεις Σπηλιώτη, Αθήνα 1990.
12. ***Παράγωγοι***, Τεύχος 1 (σελ. 413), Εκδόσεις Σπηλιώτη, Αθήνα 1991, 1994^2.
13. ***Άλγεβρα Β΄ Λυκείου***, Τεύχος 1 (σελ. 295), Εκδόσεις Πελεκάνος, Αθήνα 1991.
14. ***Εξετάσεις ’93 – Διαγωνίσματα***, (σελ. 174), Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Θεσσαλονίκη 1993 (με τη συνεργασία της Ε. Μήτσιου).
15. ***Εξετάσεις ’94 – Προβλήματα***, (σελ. 181), Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Θεσσαλονίκη 1994 (με τη συνεργασία της Ε. Μήτσιου).
16. ***Ολοκληρώματα,*** (σελ. 490). Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Θεσσαλονίκη 1994.
17. ***Εξετάσεις ’95 – Θέματα***, Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Θεσσαλονίκη 1995 (με τη συνεργασία των Γ. Μαυρίδη και Ε. Μήτσιου).
18. ***Πιθανότητες*** (σελ. 126), Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Θεσσαλονίκη 1995.
19. ***1000 ασκήσεις ολοκληρωμάτων***, Τεύχος 1 (σελ. 238), Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Θεσσαλονίκη 1995.

20. ***1000 ασκήσεις ολοκληρωμάτων***, Τεύχος 2 (σελ. 176), Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Θεσσαλονίκη 1996.
21. ***1000 ασκήσεις ολοκληρωμάτων***, Τεύχος 3 (σελ. 278), Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Θεσσαλονίκη 1997.
22. ***Συνδυαστική,*** (σελ. 136), Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Θεσσαλονίκη 1997.
23. ***Θεωρία αριθμών,*** (σελ. 197), Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Θεσσαλονίκη (χ.χ.).
24. ***Τεστ πολλαπλής επιλογής για την Α΄ Λυκείου***, (σελ. 115), Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Θεσσαλονίκη (χ.χ.).

Β΄: ΑΡΘΡΑ – ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ

1. **Ασκήσεις στις συναρτήσεις**. *Ευκλείδης Β΄*, τόμος ΙΓ΄, τεύχος 5, σ. 226 (1980).
2. **Τα Μαθηματικά και η ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα**. *Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σσ. 438-447, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα, 1984.
3. **Η γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων στη μεθοδική αντιμετώπιση προβλημάτων**. *Ευκλείδης Β΄*, τόμος Κ΄, τεύχος 1, σσ. 46-50 (1986).
4. **Ασκήσεις Γ΄ Λυκείου**. *Ευκλείδης Β΄*, τόμος Κ΄, τεύχος 4, σσ. 248-256 (1987).
5. **Μερικές παρατηρήσεις στο άρθρο για τις περιοδικές συναρτήσεις**. *Ευκλείδης Γ΄*, τόμος 5, τεύχος 17, σσ. 71-75 (1987).
6. **Διδακτική και παραδιδακτική των Μαθηματικών (περίληψη)**. *Πρακτικά 10ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σ. 411. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα, 1993.
7. **Μια συναρτησιακή απόδειξη της ανισότητας του Cauchy**. *Μαθηματική Παιδεία*, τεύχος 1, σσ.31-33 (1996).
8. **Θεμελιώδεις προτάσεις του Διαφορικού Λογισμού που προκύπτουν σαν απλά πορίσματα του θεωρήματος Fermat**. *Μαθηματική Παιδεία*, τεύχος 1, σσ.39-42 (1996)
9. **Η απομυθοποίηση των tests πολλαπλής επιλογής**. *Μαθηματική Παιδεία*, τεύχος 2, σσ.19-27 (1996).
10. **Τα θεωρήματα Μέσης Τιμής του κλασικού διαφορικού λογισμού**. *Μαθηματική Παιδεία*, τεύχος 2, σσ.51-67 (1996).
11. **Ένα θεώρημα του Γιάννη Αυδή για το τετράεδρο**. *Μαθηματική Παιδεία*, τεύχος 2, σσ.73-75 (1996).
12. **Το θεώρημα Cayley – Hamilton για πίνακες 2x2**. *Μαθηματική Παιδεία*, τεύχος 2, σσ.101-104 (1996).
13. **Τρόποι αξιολόγησης των υποψηφίων για τα ανώτερα και ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα της Χώρας**. *Μαθηματική Παιδεία*, τεύχος 3, σσ.19-27 (1997).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ο Θεόδωρος Καζαντζής έλαβε μέρος ως εισηγητής και σε άλλα συνέδρια της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, αλλά τα κείμενα των εισηγήσεων του δεν έχουν καταχωρηθεί στα αντίστοιχα Πρακτικά.

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ε' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ

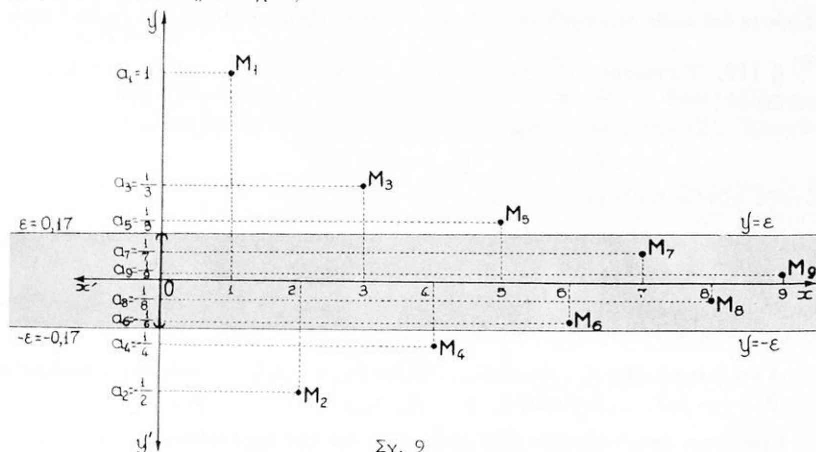
ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1968

§ 120. Ὁρισμός.—Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ μὲ γενικὸν ὅρον $\alpha_\nu = (-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{\nu}$, ἤτοι ἡ ἀκολουθία :

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots,\ (-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{\nu},\ \ldots$$

Αὕτη παρίσταται γραφικῶς ὡς εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα ἐμφαίνεται.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα ἕνα θετικὸν ἀριθμὸν ε, π.χ. τὸν $\varepsilon = 0{,}17$, ὡς ἐπίσης καὶ τὰς εὐθείας μὲ ἐξισώσεις $y = \varepsilon = 0{,}17$ καὶ $y = -\varepsilon = -0{,}17$, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων μίαν «*ταινίαν*» (βλ. Σχ. 9).



Σχ. 9

Παρατηροῦμεν εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα, ὅτι τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3, M_4 καὶ M_5 κεῖνται ἐκτὸς τῆς ταινίας, ἐνῷ τὰ ἀπὸ τοῦ δείκτου $\nu = 6$ καὶ «*πέραν*» ἀντίστοιχα σημεῖα, ἤτοι τὰ M_6, M_7, $M_8,\ldots$ εὑρίσκονται **ὅλα** ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν $y = \varepsilon$ καὶ $y = -\varepsilon$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ τεταγμέναι τῶν M_1, M_2, M_3, M_4 καὶ M_5, ἤτοι οἱ ὅροι α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, ἐνῷ οἱ ἀπὸ τοῦ δείκτου $\nu = 6$ καὶ πέραν ἀντίστοιχοι ὅροι, ἤτοι οἱ : α_6, α_7, $\alpha_8,\ldots$ κεῖνται **ὅλοι** εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, δηλαδὴ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ μηδενός, καθόσον τὸ $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ γράφεται καὶ οὕτω : $(0-\varepsilon,\ 0+\varepsilon)$.

Ὥστε : $\quad -\varepsilon < \alpha_\nu < +\varepsilon \quad \forall \quad \nu \geqq \nu_0 = 6 \quad (\varepsilon = 0{,}17)$

ἢ ἰσοδυνάμως :

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \forall \quad \nu \geqq \nu_0 = 6.$$

Ἐὰν τώρα λάβωμεν ἕνα ἄλλον θετικὸν ἀριθμὸν ε, μικρότερον τοῦ προηγουμένου, π.χ. τὸν $\varepsilon = 0{,}09$, καὶ ἐπαναλάβωμεν τὰ ἀνωτέρω, τότε καταλήγομεν

εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὰ σημεῖα $M_1, M_2, \ldots$ καὶ M_{11} κεῖνται ἐκτὸς τῆς ταινίας τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν $y = \varepsilon = 0{,}09$ καὶ $y = -\varepsilon = -0{,}09$, ἐνῷ τὰ ἀπὸ τοῦ δείκτου $\nu = 12$ καὶ πέραν ἀντίστοιχα σημεῖα, ἤτοι τὰ $M_{12}, M_{13}, \ldots, M_\nu, \ldots$ εὑρίσκονται ἐντὸς τῆς ἐν λόγῳ ταινίας, δηλαδὴ αἱ τεταγμέναι τῶν σημείων τούτων, ἤτοι οἱ ὅροι : $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας κεῖνται εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, ἤτοι ἰσχύει :

$$-\varepsilon < \alpha_\nu < +\varepsilon \qquad \forall\ \nu \geqq \nu_0 = 12 \qquad (\varepsilon = 0{,}09)$$

ἢ ἰσοδυνάμως :

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \qquad \forall\ \nu \geqq \nu_0 = 12.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἑκάστην ἐκλογὴν τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ε ὑπάρχει εἷς δείκτης ν_0, ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ε, ἤτοι $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$. Οὕτω, διὰ $\varepsilon = 0{,}17$ ἔχομεν, ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = 6$, ἐνῷ διὰ $\varepsilon = 0{,}09$ ἔχομεν $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = 12$.

Τὴν ἐν λόγῳ ἀκολουθίαν α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μὲ $\alpha_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu}$, ἡ ὁποία πληροῖ τὰ ἀνωτέρω χαρακτηρίζομεν ὡς **«μηδενικὴν ἀκολουθίαν»**.

Γενικῶς : *Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καλεῖται* **μηδενικὴ ἀκολουθία** *καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $\alpha_\nu \to 0$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἄν : διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχῃ δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$* (ἐξαρτώμενος, ἐν γένει, ἐκ τοῦ ε) *τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :*

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \ \text{διὰ κάθε}\ \nu \geqq \nu_0(\varepsilon).$$

Συντόμως, μὲ χρῆσιν τῶν γνωστῶν μας συμβόλων, ὁ ὁρισμὸς οὗτος δίδεται ὡς ἑξῆς :

$$\boldsymbol{\alpha_\nu \to 0 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) : |\alpha_\nu| < \varepsilon\ \ \forall\ \nu \geqq \nu_0}$$

§ 121. Παραδείγματα μηδενικῶν ἀκολουθιῶν.

1ον. *Ἡ σταθερὰ ἀκολουθία $\alpha_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.*

2ον. *Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενική,* διότι διὰ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, καὶ ὡς τοιοῦτος δύναται νὰ ληφθῇ ἐδῶ εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{\varepsilon}$ *) τοιοῦτος, ὥστε διὰ κάθε $\nu \geqq \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ ἰσχύει : $|\alpha_\nu| = \left|\frac{1}{\nu}\right| = \frac{1}{\nu} \leqq \frac{1}{\nu_0} < \varepsilon$, διότι ἐκ τῆς $\nu_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \frac{1}{\nu_0} < \varepsilon$.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) \left(\text{ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ } \nu_0 \geqq \frac{1}{\varepsilon}\right) : |\alpha_\nu| = \left|\frac{1}{\nu}\right| < \varepsilon \ \ \forall\ \nu \geqq \nu_0.$$

---

* Τοῦτο συμπεραίνομεν, διότι ἰσχύει : $|\alpha_\nu| = \frac{1}{\nu} < \varepsilon \Longleftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon}$.


OE
ΔB

Θ. Καζαντζή

αλγεβρα

Τόμος II

Θεοδώρου Νέστ. Καζαντζῆ

Αλγεβρα

Τόμος ΙΙ

Διά τούς ὑποψηφίους τῶν ἀνωτάτων σχολῶν θετικῶν ἐπιστημῶν καί τούς μαθητάς τῶν ἀνωτέρων τάξεων τῶν πρακτικῶν Γυμνασίων.

Θεσσαλονίκη 1974

ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΚΑΖΑΝΤΖΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ
Δ. ΓΟΥΝΑΡΗ 56 - ΘΕΣ/ΝΙΚΗ

εκδοτικος οικος "ΜΑΣΤΟΡΙΔΗ"
αγιας σοφιας 46 τηλ. 220-034
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

FOTO offset γιαννοπουλος τηλ. 650-582 θεσσαλονικη

Ἀφιεροῦται
εἰς τοὺς
γονεῖς μου
Νέστορα καὶ Σοφίαν Καζαντζῆ

νόν κέντρον α τούτων.

Ἀπόδειξις.

Ἔστω ὅτι ὑπάρχει καί ἕτερον στοιχεῖον β ($\beta \in R \wedge \beta \neq \alpha$) κοινόν ὅλων τῶν περιοχῶν τοῦ α. Τότε θά εἶναι

$$\beta \in \vartheta(\alpha,\varepsilon)\ \forall \varepsilon > 0 \text{ καί ἄρα } |\beta-\alpha| < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0.$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐφ' ὅσον $\beta \neq \alpha$, θά εἶναι $|\beta-\alpha| > 0$.

Συνάγομεν λοιπόν ὅτι ὁ ἀριθμός $|\beta-\alpha|$ ὀφείλει νά εἶναι θετικός καί μικρότερος παντός θετικοῦ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ὡς γνωστόν παντός θετικοῦ ἀριθμοῦ ὑπάρχει μικρότερος.

Πόρισμα I.

Ἐάν α πραγματικός ἀριθμός καί β ἐπίσης πραγματικός ἀριθμός $\neq \alpha$, τότε ὑπάρχει περιοχή τοῦ α τοιαύτη ὥστε ὁ β νά κεῖται ἐκτός αὐτῆς.

Ἀπόδειξις. Εἰς τήν ἐναντίαν περίπτωσιν ὁ β θά ἦτο στοιχεῖον ὅλων τῶν περιοχῶν τοῦ α καί ἄρα θά συνέπιπτε μέ τόν α.

Πόρισμα II.

Ἐάν α, β διάφοροι ἀλλήλων πραγματικοί ἀριθμοί, τότε ὑπάρχουν περιοχαί $\vartheta(\alpha,\varepsilon_1)$ καί $\vartheta(\beta,\varepsilon_2)$ αἱ ὁποῖαι οὐδέν κοινόν στοιχεῖον ἔχουν.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τάς περιοχάς $\vartheta(\alpha,\varepsilon/2)$ καί $\vartheta(\beta,\varepsilon/2)$ ὅπου $\varepsilon > 0$ τυχόν. Ἔστω ὅτι ὑπάρχει κοινόν στοιχεῖον x τῶν περιοχῶν τούτων. Τότε $|x-\alpha| < \varepsilon/2$ καί $|\beta - x| < \varepsilon/2$. Ἄρα

καί $|x-\alpha| + |\beta - x| < \varepsilon$ καί $|(x-\alpha)+(\beta-x)| < \varepsilon$.

Συνάγομεν ὅτι $|\beta-\varepsilon| < \varepsilon$. Ἐάν διά κάθε $\varepsilon > 0$ αἱ περιοχαί $\vartheta(\alpha,\varepsilon)$ καί $\vartheta(\beta,\varepsilon)$ ἔχουν κοινόν στοιχεῖον, θά πρέπη νά εἶναι $|\beta-\alpha| < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$. Τοῦτο εἶναι ἄτοπον, διότι, ἀφοῦ $\alpha \neq \beta$, εἶναι $|\beta-\alpha| > 0$ καί ὡς γνωστόν, παντός θετικοῦ ἀριθμοῦ ὑπάρχει θετικός μικρότερος αὐτοῦ. Ἄρα ὑπάρχει περιοχή τοῦ α καί περιοχή τοῦ β ἄνευ οὐδενός κοινοῦ στοιχείου.

Παρατήρησις.

Ἕνας τρόπος κατασκευῆς τοιούτων περιοχῶν εἶναι καί ὁ κάτωθι:

$-\infty$ $\alpha-\varepsilon$ α x $\alpha+\varepsilon$ $\beta-\varepsilon$ y β $\beta+\varepsilon$ $+\infty$

$\vartheta(\alpha,\varepsilon)$ $\vartheta(\beta,\varepsilon)$

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha < \beta$. Τότε $\beta - \alpha > 0$. Θέτομεν $\varepsilon = \frac{\beta-\alpha}{3} > 0$ καί θεωροῦμεν τάς περιοχάς $\vartheta(\alpha,\varepsilon)$ καί $\vartheta(\beta,\varepsilon)$ $\forall x \in \vartheta(\alpha,\varepsilon)$ εἶναι $\alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{3}$ καί $\forall y \in \vartheta(\beta,\varepsilon)$ εἶναι $\beta - \varepsilon < y < \beta + \varepsilon$. Ἀλλά $(\beta-\varepsilon) - (\alpha+\varepsilon) = \beta - \alpha - 2\varepsilon = 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon > 0$ καί ἄρα $\alpha + \varepsilon < \beta - \varepsilon$.

Συνάγομεν ὅτι $x < y$ $\forall x \in \vartheta(\alpha,\varepsilon)$ καί $\forall y \in \vartheta(\beta,\varepsilon)$ καί ἑπομένως αἱ περιοχαί $\vartheta(\alpha,\varepsilon)$ καί $\vartheta(\beta,\varepsilon)$ δέν ἔχουν κοινόν στοιχεῖον.

Θεωρία τῆς συγκλίσεως.

§12. Τελικά τμήματα μιᾶς ἀκολουθίας.

Ὁρισμός.

Θά ὀνομάζεται τελικόν τμῆμα μιᾶς ἀκολουθίας $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots$ κάθε μέρος αὐτῆς τό ὁποῖον περιέχει ὅλους τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας ἀπό τινος ὡρισμένης τάξεως· καί ἑφεξῆς. Ἐπί παραδείγματι, τελικά τμήμα-

τα τῆς ἀκολουθίας $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ εἶναι:

1) ἡ ἴδια ἀκολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$

2) τό τμῆμα $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \ldots$

3) τό $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \ldots$

4) $\alpha_4, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \ldots$

5) $\alpha_5, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \ldots$

6) $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_9, \alpha_{19}, \alpha_{20}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \ldots$

κ. ὅ. κ.

Ὑπάρχουν προφανῶς ἄπειρα τελικά τμήματα μιᾶς ἀκολουθίας. Εἶναι φανερόν ἐπίσης ὅτι **ἐάν θεωρήσωμεν τούς ὅρους μιᾶς ἀκολουθίας $\{\alpha_\nu\}$ τῶν ὁποίων ἡ τάξις εἶναι μεγαλυτέρα ἑνός ὡρισμένου φυσικοῦ ἀριθμοῦ, οὗτοι συγκροτοῦν ἕν τελικόν τμῆμα τῆς ἀκολουθίας.** Ἐπί παραδείγματι, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $\{\alpha_\nu\}$ μέ τάξιν >8 συγκροτοῦν τό τελικόν τμῆμα $\langle \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \rangle$. Γενικώτερον, **οἱ ὅροι μέ τάξιν μεγαλυτέραν ἑνός ὡρισμένου θετικοῦ ἀριθμοῦ, συγκροτοῦν τελικόν τμῆμα τῆς ἀκολουθίας.** Οὕτω π.χ. οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $\{\alpha_\nu\}$ μέ τάξιν $>6,7$ συγκροτοῦν τό τελικόν τμῆμα $\langle \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \ldots \rangle$.

Ἕν τελικόν τμῆμα μιᾶς ἀκολουθίας, περιέχει ὅλους τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας, τῇ ἐξαιρέσει τό πολύ πεπερασμένου πλήθους ὅρων.

Ἀσκήσεις.

1 Θεωροῦμεν τήν ἀκολουθίαν $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\Phi}$. Ἐξετάσατε ποῖα τῶν κάτωθι τμημάτων εἶναι τελικά καί ποῖα ὄχι.

i) $\langle \alpha_5, \alpha_7, \alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{13}, \ldots \rangle$ (περιέχει ὅλους τούς ὅρους περιττῆς τάξεως ἀπό τοῦ πέμπτου καί ἐφεξῆς).

ii) $\langle \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \ldots \rangle$

iii) $\langle \alpha_{100}, \alpha_{101}, \alpha_{102}, \alpha_{103}, \ldots \rangle$

iv) $\langle \alpha_3, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{12}, \alpha_{15}, \ldots \rangle$ (περιέχει τούς ὅρους α_ν μέ $\nu =$ πολλ$\cdot 3$ καί $\nu \geqslant 3$).

v) $\langle \alpha_1, \alpha_8, \alpha_{20}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}, \alpha_{35}, \ldots \rangle$

Ἀπάντησις. Εἶναι τελικά τμήματα τά ii, iii καί v). Πράγματι τό ii, περιέχει ὅλους τούς ὅρους τάξεως >9.

Τό iii) περιέχει ὅλους τούς ὅρους μέ τάξιν >99.

Τό v) περιέχει ὅλους τούς ὅρους μέ τάξιν >30.

Τό i) καί iv) δέν εἶναι τελικά τμήματα διότι δέν ὑπάρχει τάξις, τοιαύτη ὥστε ὅλοι οἱ ὅροι μέ τάξιν μεγαλυτέραν αὐτῆς νά ἀνήκουν εἰς τό τμῆμα.

§13. Ἰδιότητες ἰσχύουσαι τελικῶς δι' ὅλους τούς ὅρους μιᾶς ἀκολουθίας.

Λέγομεν ὅτι μία ἰδιότης ἀληθεύει τελικῶς δι' ὅλους τούς ὅρους μιᾶς ἀκολουθίας $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ τότε καί μόνον ὅταν ὑπάρχῃ ἕν τουλάχιστον τελικόν τμῆμα αὐτῆς, ὥστε ἡ ἰδιότης νά εἶναι ἀληθής δι' ὅλους τούς ὅρους τοῦ τμήματος τούτου.

Ἰσοδύναμος τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εἶναι ὁ κάτωθι:

Λέγομεν ὅτι μία ἰδιότης ἀληθεύει τελικῶς, δι' ὅλους τούς ὅρους μιᾶς

ἀκολουθίας $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\nu, \ldots$ τότε καί μόνον, ὅταν ὑπάρχῃ τάξις ν_0 (γενικώτερον θετικός ἀριθμός N), ὥστε ἡ ἰδιότης νά εἶναι ἀληθής δι' ὅλους τούς ὅρους a_ν τῆς ἀκολουθίας μέ τάξιν $> \nu_0$ (γενικώτερον δι' ὅλους τούς ὅρους a_ν μέ $\nu > N$).

Παραδείγματα.

1. Δίδεται ἡ ἀκολουθία $\{a_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu^3} / \nu \in \Phi\}$. Δείξατε ὅτι ἡ ἰδιότης $|a_\nu| < \frac{1}{100}$ ἀληθεύει τελικῶς δι' ὅλους τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας.

Ἀπόδειξις.

Θά εὕρωμεν τελικόν τμῆμα τῆς ἀκολουθίας, δι' ὅλους τούς ὅρους τοῦ ὁποίου νά εἶναι ἀληθής ἡ ἰδιότης $|a_\nu| < \frac{1}{100}$.

Εἶναι $a_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu^3}$ καί ἄρα $|a_\nu| = \frac{1}{\nu^3}$.

Ἰσχύει $|a_\nu| < \frac{1}{100} \Longleftrightarrow \frac{1}{\nu^3} < \frac{1}{100} \Longleftrightarrow \nu^3 > 100 \Longleftrightarrow \nu \sqrt[3]{100} \Longleftrightarrow \nu > 4,6 \ldots$

Ἡ ἰδιότης ἀληθεύει λοιπόν διά τούς ὅρους $a_5, a_6, a_7, a_8, \ldots$ κ.ο.κ. δηλ. **δι' ὅλους** τούς ὅρους τάξεως > 4**.** Συνεπῶς, ἀληθεύει, τελικῶς δι' ὅλους τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας.

2. Θεωροῦμεν τήν ἀκολουθίαν $\{a_\nu\}$ μέ γενικόν ὅρον $a_\nu = 1 + (-1)^{\nu+1} + \frac{1}{\nu} / \nu \in \Phi$. Νά ἐξετασθῇ, ἐάν ἡ ἰδιότης $|a_\nu| < 10^{-2}$ ἀληθεύῃ τελικῶς δι' ὅλους τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας.

Ἀπάντησις.

Διά τούς ὅρους a_ν ἀρτίας τάξεως ἔχωμεν $(-1)^{\nu+1} = -1$ καί ἄρα

$$a_\nu = 1 + (-1) + \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu}.$$

Διά $\nu =$ ἄρτιον ἰσχύει $|a_\nu| < \frac{1}{100} \Longleftrightarrow \frac{1}{\nu} < \frac{1}{100} \Longleftrightarrow \nu > 100$.

Οἱ ὅροι $a_{102}, a_{104}, a_{106}, a_{108}, \ldots$ κ.ο.κ. ἔχουν λοιπόν τήν ἰδιότητα.

Διά τούς ὅρους a_ν περιττῆς τάξεως, εἶναι

$$a_\nu = 1 + 1 + \frac{1}{\nu} = 2 + \frac{1}{\nu} \text{ καί } |a_\nu| = 2 + \frac{1}{\nu} \;/\; \nu = 1, 3, 5, \ldots$$

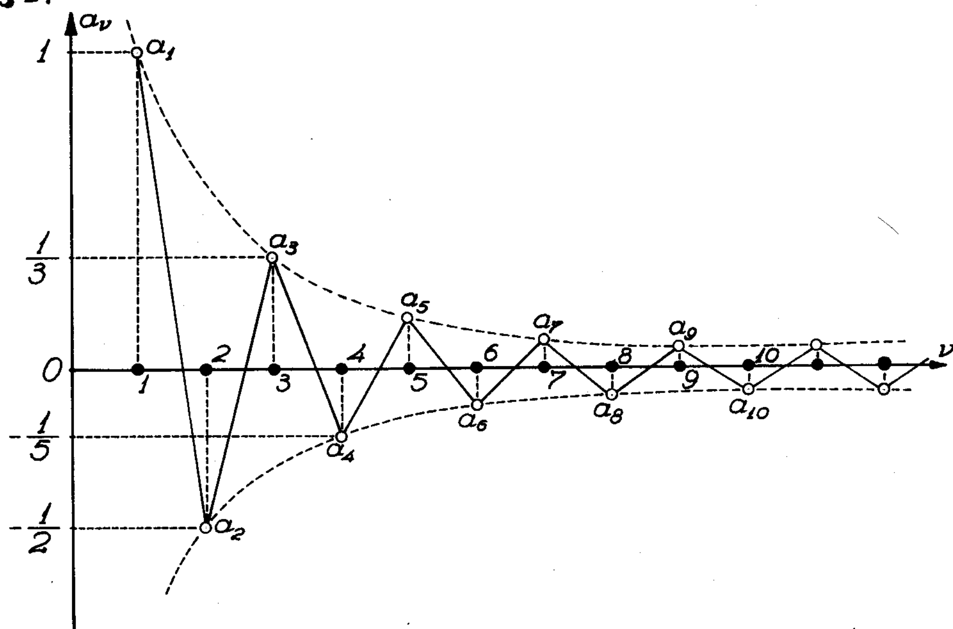
Εἶναι φανερόν ὅτι $2 + \frac{1}{\nu} > \frac{1}{100}$ διά $\nu = 1, 3, 5, 7, \ldots$ κ.ο.κ. καί ἑπομένως, ἡ ἰδιότης $|a_\nu| < \frac{1}{100}$, δι' οὐδένα ὅρον περιττῆς τάξεως εἶναι ἀληθές.

Συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ἰδιότης ἀληθεύει ἀκριβῶς διά τούς ὅρους $a_{102}, a_{104}, a_{106}, a_{108}, a_{110}, \ldots$ κ.ο.κ. οἱ ὁποῖοι ὅμως δέν συγκροτοῦν τελικόν τμῆμα τῆς ἀκολουθίας.

Σημείωσις.

Εἰς τά ἑπόμενα, λέγοντες ὅτι μία ἰδιότης ἀληθεύει δι' ἕν τελικόν τμῆμα ἀκολουθίας $\{a_\nu\}$, θά νοοῦμεν ὅτι ἀληθεύει δι' ὅλους τούς ὅρους τοῦ τμήματος τούτου.

§14 Μηδενικαί ἀκολουθίαι



Ἀς θεωρήσωμεν τήν ἀκολουθίαν $a_1, a_2, a_3, \ldots$ μέ γενικόν ὅρον $a_\nu = \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}$ ἡ ὁποία παρίσταται γραφικῶς εἰς τό ἀνωτέρω σχῆμα.

Παρατηροῦμεν ὅτι αὐξανομένης τῆς τάξεως, αἱ τιμαί τῶν ὅρων αὐτῆς συσσωρεύονται ἐγγύς τοῦ μηδενός, δέν παρατηρεῖται δέ συσσώρευσις τούτων, ἐγγύς ἄλλου ἀριθμοῦ.

Τό φαινόμενον τοῦτο θά ἀποδώσωμεν ἀκριβέστερον ἀναλυτικῶς, διά τῶν ἑξῆς παρατηρήσεων:

Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐδόθη ἕνας θετικός ἀριθμός, ὁ $\frac{2}{7}$ π.χ. Θά ἐξετάσωμεν ποῖοι ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι ἀπολύτως μικρότεροι αὐτοῦ.

Εἶναι $|a_\nu| = \frac{1}{\nu}$ $\forall \nu \in \Phi$. Θά ἔχωμεν λοιπόν $|a_\nu| < \frac{2}{7}$ τότε καί μόνον ὅταν $\frac{1}{\nu} < \frac{2}{7}$. Ἀλλά ἰσχύει $\frac{1}{\nu} < \frac{2}{7} \iff \nu > \frac{7}{2}$ δηλ. διά $\nu = 4, 5, 6, 7, \ldots$ κ.ὅ.κ.

Ἡ ἰδιότης $|a_\nu| < 2/7$ ἀληθεύει λοιπόν δι' ὅλους τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας μέ τάξιν μεγαλυτέραν τοῦ 3. Οἱ ὅροι αὐτοί συγκροτοῦν προφανῶς ἕν τελικόν τμῆμα τῆς ἀκολουθίας $\{a_\nu\}$.

Ἀς θεωρήσωμεν τώρα τήν ἰδίαν ἀκολουθίαν καί ἕτερον θετικόν ἀριθμόν ἔστω τόν $\frac{3}{1000}$. Ἔχομεν $|a_\nu| < \frac{3}{1000} \iff \frac{1}{\nu} < \frac{3}{1000} \iff \nu > \frac{1000}{3} \iff \nu > 333,3\ldots$ Ἡ ἰδιότης $|a_\nu| < \frac{3}{1000}$ ἀληθεύει λοιπόν δι' ὅλους τούς ὅρους ἀπό τοῦ ὅρου a_{334} καί ἐφεξῆς, δηλαδή, δι' ὅλους τούς ὅρους τάξεως > 333. Οἱ ὅροι αὐτοί συγκροτοῦν πάλιν ἕν τελικόν τμῆμα τῆς ἀκολουθίας, τό $< a_{334}, a_{335}, a_{336}, a_{337}, \ldots$ κ.ὅ.κ.

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ δύο θεωρηθέντες θετικοί ἀριθμοί $\frac{2}{7}$ καί $\frac{3}{1000}$

ἔχουν μίαν κοινήν ἰδιότητα: Δι' ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, ὑπάρχει τελικόν τμῆμα τῆς ἀκολουθίας, ὥστε ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ τμήματος αὐτοῦ, νά εἶναι ἀπολύτως μικρότεροι τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Ἰσοδυνάμως, ὑπάρχει δι' ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν $2/7$ καί $3/1000$ μία τάξις (ἡ $\nu_1 = 3$ καί $\nu_2 = 333$ ἀντιστοίχως), τοιαύτη ὥστε ὅλοι οἱ ὅροι μέ τάξιν μεγαλυτέραν αὐτῆς νά εἶναι ἀπολύτως μικρότεροι τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Γεννᾶται ἤδη τό ἐρώτημα: Οἱ θεωρηθέντες θετικοί ἀριθμοί εἶναι οἱ μόνοι ἔχοντες τήν ὡς ἄνω ἰδιότητα; Ἄν ὄχι ποῖοι θετικοί ἀριθμοί τήν ἔχουν; Τέλος, μήπως τήν ὡς ἄνω ἰδιότητα ἔχουν ὅλοι θετικοί ἀριθμοί; Θά δείξωμεν τό τελευταῖον. Δηλαδή, ὅτι διά τήν συγκεκριμμένην ἀκολουθίαν $\{a_\nu = \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} / \nu \in \Phi\}$ τήν ὡς ἄνω ἰδιότητα ἔχουν ὅλοι οἱ θετικοί. Θά δείξωμεν δηλαδή, ὅτι διά κάθε θετικόν ὑπάρχει τελικόν τμῆμα τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ ὅροι νά εἶναι ἀπολύτως μικρότεροι τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἔστω πράγματι τυχών θετικός ἀριθμός ε.

Διά νά εἶναι $|a_\nu| < \varepsilon$ πρέπει καί ἀρκεῖ $\frac{1}{\nu} < \varepsilon$ δηλαδή $\nu > \frac{1}{\varepsilon}$.

Ἡ ἀνισότης $|a_\nu| < \varepsilon$ εἶναι λοιπόν ἀληθής, δι' ὅλους τούς ὅρους τούς ἔχοντας τάξιν μεγαλυτέραν τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{1}{\varepsilon}$. Ἔχομεν λοιπόν $|a_\nu| < \varepsilon$ $\forall \nu \in \Phi) \frac{1}{\varepsilon}$. Ἀλλ' ὡς γνωστόν, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας μέ τάξιν μεγαλυτέραν τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{1}{\varepsilon}$ συγκροτοῦν τελικόν τμῆμα αὐτῆς.

Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι οἱοσδήποτε καί ἄν δοθῇ ὁ θετικός ἀριθμός ε, εὑρίσκεται τῇ βοηθείᾳ τούτου θετικός ἀριθμός N ($N = \frac{1}{\varepsilon}$) ὥστε ὅλοι οἱ ὅροι a_ν μέ τάξιν $\nu > \frac{1}{\varepsilon} = N$ νά πληροῦν τήν ἀνισότητα $|a_\nu| < \varepsilon$. Εἰς τό φαινόμενον τοῦτο ὀφείλεται καί ἡ παρατηρηθεῖσα συσσώρευσις τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας περί τό μηδέν καί μόνον.

Συμφωνοῦμεν νά λαμβάνωμεν τό ἀνωτέρω φαινόμενον ὡς βάσιν, διά τόν ὁρισμόν τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας, ἤ ὡς λέγωμεν τῆς ἀκολουθίας μέ ὅριον τό μηδέν. Δίδομεν λοιπόν τόν κάτωθι **ὁρισμόν**:

I) Λέγομεν ὅτι μία ἀκολουθία εἶναι μηδενική, (ἤ ὅτι συγκλίνει πρός τό μηδέν) τότε καί μόνον, ὅταν διά κάθε θετικόν ε, ὑπάρχῃ τελικόν τμῆμα τῆς ἀκολουθίας, τοιοῦτον ὥστε ὅλοι οἱ ὅροι αὐτοῦ νά εἶναι ἀπολύτως μικρότεροι τοῦ ε.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τό ὡς ἄνω τελικόν τμῆμα δέν εἶναι ἀπαραιτήτως πάντοτε ἕν καί τό αὐτό, ἀλλά ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐκλογήν τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ε.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν ὁρισμόν τοῦ τελικοῦ τμήματος, διατυποῦμεν μέ τόν κάτωθι ἰσοδύναμον τρόπον τόν ὁρισμόν τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας.

II) Λέγομεν ὅτι μία ἀκολουθία $\{a_\nu\}$ εἶναι μηδενική, τότε καί μόνον, ὅταν διά κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχῃ τάξις $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, ($\nu_0 \in \Phi$) τοιαύτη, ὥστε ὅλοι οἱ ὅροι a_ν μέ $\nu \in \Phi > \nu_0$ νά πληροῦν τήν ἀνισότητα $|a_\nu| < \varepsilon$.

Παρατηρήσεις.

1. Ἡ τάξις ν_0 ἐξαρτᾶται ἐν γένει ἀπό τήν ἐκλογήν τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ε καί κατασκευάζεται τῇ βοηθείᾳ τούτου.

2. Δέν εἶναι ἀπαραίτητον νά ἀπαιτήσωμεν $\nu_0 \in \Phi$. Τό τελικόν τμῆμα διά τό ὁποῖον ὀφείλει νά εἶναι $|a_\nu| < \varepsilon$, δύναται νά καθωρισθῇ ἐκ τῶν ὅρων a_ν τῆς ἀκολουθίας μέ τάξιν $\nu > N(\varepsilon) = N$ ὅπου $N > 0$.

Δυνάμεθα λοιπόν νά δώσωμεν καί κατά τρίτον τρόπον (ἰσοδύναμον

πρός τούς δύο πρώτους) τόν ὁρισμόν τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας:

III) Λέγομεν ὅτι μία ἀκολουθία $\{a_\nu\}$ εἶναι μηδενική, τότε καί μόνον ὅταν, $\forall \varepsilon > 0$, ὑπάρχει θετικός ἀριθμός $N = N(\varepsilon)$ ὥστε νά εἶναι $|a_\nu| < \varepsilon$ $\forall \nu \in \Phi$ μέ $\nu > N(\varepsilon)$.

3. Τό νόημα τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας εἶναι τό ἀκόλουθον:

Οἱοσδήποτε καί ἄν δοθῆ ὁ θετικός ἀριθμός ε, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας μέ τήν ἰδιότητα $|a_\nu| < \varepsilon$ συγκροτοῦν τελικόν τμῆμα τῆς ἀκολουθίας. Δέν ὑπάρχει δηλαδή οὐδείς θετικός ἀριθμός ε, διά τόν ὁποῖον νά μή δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἀντίστοιχον τελικόν τμῆμα τῆς ἀκολουθίας, ὥστε νά εἶναι $|a_\nu| < \varepsilon$ δι' ὅλους τούς ὅρους τοῦ τμήματος τούτου.

Ἀντιστοιχεῖ λοιπόν εἰς κάθε θετικόν ἀριθμόν ε, ἕν τοὐλάχιστον τελικόν τμῆμα, ὥστε νά εἶναι $|a_\nu| < \varepsilon$ δι' ὅλους τούς ὅρους αὐτοῦ.

Διακρίνομεν λοιπόν δύο τρόπους χρησιμοποιήσεως τοῦ ὡς ἄνω ὁρισμοῦ.

A) Ὅταν ζητοῦμεν νά ἀποδείξωμεν ὅτι μία ἀκολουθία $\{a_\nu\}$ εἶναι μηδενική.

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ὀφείλομεν νά ἀποδείξωμεν ὅτι ἀντίστοιχον τελικόν τμῆμα μέ τήν ἰδιότητα $|a_\nu| < \varepsilon$, **ὑπάρχει διά κάθε $\varepsilon > 0$.** Πρός τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: **Θεωροῦμεν τόν τυχόντα θετικόν ε, καί ἀποδεικνύομεν ὅτι εἶναι δυνατόν νά εὕρωμεν τάξιν $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (ἤ θετικόν ἀριθμόν $N(\varepsilon)$), μέ τήν ἰδιότητα, νά εἶναι $|a_\nu| < \varepsilon$ δι' ὅλους τούς ὅρους a_ν μέ $\nu > \nu_0$.**

(Ἡ ἑκάστοτε τάξις κατασκευάζεται τῆ βοηθεία τοῦ ε).

B) Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{a_\nu\}$ εἶναι μηδενική.

Τότε εἶναι γνωστόν, ὅτι οὐδείς θετικός ε στερεῖται τοῦ καταλλήλου τελικοῦ τμήματος διά τούς ὅρους τοῦ ὁποίου νά εἶναι $|a_\nu| < \varepsilon$ (ἤ ἰσοδυνάμως τῆς καταλλήλου τάξεως ν_0 μέ $|a_\nu| < \varepsilon$ $\forall \nu \in \Phi > \nu_0$).

Ἐφ' ὅσον λοιπόν ἡ κατάλληλος τάξις $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ ὑπάρχει διά κάθε θετικόν, θά ὑπάρχη καί διά τούς εἰδικούς θετικούς ἀριθμούς πού μᾶς ἐνδιαφέρουν ἰδιαιτέρως εἰς τό ἐξεταζόμενον πρόβλημα.

Βεβαιοῦμεν λοιπόν τήν ὕπαρξιν τάξεως $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ μέ $|a_\nu| < \varepsilon$ $\forall \nu \in \Phi > \nu_0$ διά τούς εἰδικούς ἀριθμούς $\varepsilon > 0$ οἱ ὁποῖοι μᾶς ἐνδιαφέρουν ἰδιαιτέρως.

4. Τό γεγονός ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{a_\nu\}$ εἶναι μηδενική, γράφεται συμβολικῶς μέ $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = 0$ ἤ $\mathop{op}\limits_{\nu \to \infty} a_\nu$ ἤ $a_\nu \to 0$ ἤ καί $\lim a_\nu = 0$, $op\ a_\nu = 0$, ἄν δέν ὑπάρχη κίνδυνος παρερμηνείας.

§15 Ἰδιότητες τῶν μηδενικῶν ἀκολουθιῶν.

Θεώρημα I.

Τό γινόμενον μιᾶς φραγμένης καί μιᾶς μηδενικῆς ἀκολουθίας εἶναι μηδενική ἀκολουθία.

Ἀπόδειξις.

Ἔστω $\{a_\nu\}$ φραγμένη καί $\{\beta_\nu\}$ μηδενική ἀκολουθία. Θά δείξωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{a_\nu \beta_\nu\}$ εἶναι μηδενική. Ἐνδιαφέρει λοιπόν νά δείξωμεν ὅτι εἰς κάθε θετικόν ε, δυνάμεθα νά ἀντιστοιχίσωμεν τάξιν $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, τοιαύτην, ὥστε $|a_\nu \beta_\nu| < \varepsilon$ $\forall \nu \in \Phi$ μέ $\nu > \nu_0$. Ἐφ' ὅσον ὅμως ἐδόθη

II

ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ